**引文格式**:王乐洋,李志强,胡芳芳,等.顾及设计矩阵误差时间序列AR模型精度评定的Sieve块自助采样方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(10):1957-1966.DOI:10.13203/j.whugis20230288

**Citation**: WANG Leyang, LI Zhiqiang, HU Fangfang, et al. Sieve-Block Bootstrap Sampling Method for Precision Estimation of Time Series AR Model Considering Random Errors of Design Matrix Errors[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(10):1957-1966.DOI:10.13203/j.whugis20230288

# 顾及设计矩阵误差时间序列AR模型精度评定的Sieve块自助采样方法

王乐洋[1,2] 李志强[1,3] 胡芳芳[1] 韩澍豪[1] 庞 茗[4]

1 东华理工大学自然资源部环鄱阳湖区域矿山环境监测与治理重点实验室,江西 南昌,330013

2 东华理工大学测绘与空间信息工程学院,江西 南昌,330013

3 武汉大学卫星导航定位技术研究中心,湖北 武汉,430079

4 山东农业大学资源与环境学院,山东 泰安,271017

**摘 要**:由于传统求解时间序列自回归(auto-regressive,AR)模型的最小二乘方法无法顾及设计矩阵误差,现有的AR模型迭代解法难以应用协方差传播率给出较为精确的精度评定公式。将块自助采样方法引入到AR模型精度评定研究中,并在其基础上借助Sieve自助法的思想,定义了顾及设计矩阵误差AR模型精度评定的Sieve块自助采样方法。根据不同的分块准则和采样策略,给出了4种方法的重采样步骤。模拟实验结果表明,精度评定的Sieve块自助采样方法能够得到比最小二乘法、经典的AR模型迭代解法更加可靠的自回归系数标准差,具有更强的适用性。同时,北斗卫星精密钟差真实案例表明,所提出的Sieve移动块自助法、Sieve非重叠块自助法、Sieve圆形块自助法以及Sieve静止块自助法的均方根(root mean square,RMS)比总体最小二乘的RMS分别减小了70.25%、78.65%、70.89%和79.24%,进一步验证了所提算法的有效性和可靠性,为时间序列AR模型的精度评定问题提供了一种采样思路。

**关键词**:时间序列;AR模型;精度评定;块自助法;Sieve自助法

**中图分类号**:P207 **文献标识码**:A **收稿日期**:2024-03-02

**DOI**:10.13203/j.whugis20230288 **文章编号**:1671-8860(2025)10-1957-10

# Sieve-Block Bootstrap Sampling Method for Precision Estimation of Time Series AR Model Considering Random Errors of Design Matrix Errors

*WANG Leyang*[1,2] *LI Zhiqiang*[1,3] *HU Fangfang*[1] *HAN Shuhao*[1] *PANG Ming*[4]

1 Key Laboratory of Mine Environmental Monitoring and Improving Around Poyang Lake of Ministry of Natural Resources, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

2 School of Surveying and Geoinformation Engineering, East China University of Technology, Nanchang 330013, China

3 GNSS Research Center, Wuhan University, Wuhan 430079, China

4 College of Resources and Environment, Shandong Agricultural University, Tai'an 271017, China

**Abstract**: **Objectives:** The traditional least square method cannot take into account the random errors of design matrix when solving the time series auto-regressive (AR) model. In addition, it is difficult for the existing iterative method of AR model to use the propagation of variance and covariance to give the accurate precision estimation formula. **Methods:** We introduce the block Bootstrap resampling method into the precision estimation research of the AR model, and on the basis of it, the principle of the Sieve Bootstrap is introduced. We define the Sieve-block Bootstrap sampling method for precision estimation of AR model considering random errors of design matrix. According to the different blocking criteria and sampling strategies, we give four detailed resampling procedures. **Results:** The real case of BeiDou satellite navigation system satellite precision clock offsets shows that the root mean square (RMS) of Sieve-moving block Bootstrap method,

**基金项目**:国家自然科学基金(42174011,41874001)。

**第一作者**:王乐洋,博士,教授,研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。wleyang@163.com

Sieve-nonoverlapping block Bootstrap method, Sieve-circular block Bootstrap method and Sieve-stationary block Bootstrap method are compared with the RMS of total least squares method, decreased by 70.25%, 78.65%, 70.89% and 79.24%, respectively. **Conclusions**: The experimental results show that the Sieve-block Bootstrap sampling method can obtain more reliable autoregressive coefficient standard deviations than the least square method and the classical AR model iterative method, and it has stronger applicability.

**Key words**: time series; AR model; precision estimation; block Bootstrap method; Sieve Bootstrap method

自回归(auto-regressive,AR)模型是一种基本的时间序列分析模型,作为一种动态的数据处理方法,AR模型在沉降监测、极移预报、导航定位等大地测量领域有着广泛的研究和应用[1-8]。若仅考虑观测向量的随机误差,为保证参数估值的最优性,通常是构建高斯-马尔柯夫模型、采用经典最小二乘(least squares,LS)法获取AR系数的最或然值。通过AR过程可以发现,设计矩阵是观测向量元素按一定规律排列获得的,因此设计矩阵误差与观测向量误差同源。若仍然利用LS法进行参数估计,得到的估值在统计意义上便是有偏估计,此时经典的LS法存在局限性,无法保证AR系数估值的最优性。为保证增广矩阵中相同元素具有相同的改正数,文献[9]在总体LS(total LS,TLS)的基础上推导了一种新的AR模型参数估计算法。为同时顾及AR模型中观测向量误差和设计矩阵误差,文献[10]通过引入虚拟观测值提出了一种顾及设计矩阵误差的AR模型解法。考虑到当测量数据中存在粗差扰动时,少量的粗差就可能对AR系数估值产生毁灭性影响,文献[6]研究了一种AR模型稳健TLS方法。目前,有关顾及设计矩阵误差AR模型的研究主要集中在参数估计方面,对AR系数的精度评定问题鲜有研究。

顾及设计矩阵误差的迭代解法的计算过程,AR系数估值与原始观测值之间为复杂的非线性关系,且为嵌套的隐函数形式。因此,顾及设计矩阵误差的AR模型本质上是一种非线性模型,而对于非线性平差模型的精度评定问题,常采用近似函数法得到未知参数的精度信息。该方法借助泰勒级数公式对非线性模型进行展开,并依据误差传播定律获取未知参数的方差-协方差阵[11-13]。因此,近似函数法具有固定的方差阵解析表达式,但无法避免求导计算。当遇到顾及设计矩阵误差AR模型的精度评定问题时,系数估值与观测值之间的复杂且嵌套的非线性关系使得二阶偏导数计算困难。若采用泰勒公式展开并且仅截取至一次项,可能会导致所得精度信息并不准确。因此,如何在有效避免导数计算情况下获取合理的AR系数精度信息,是本文研究的主要问题之一。

为有效解决非线性模型精度评定中导数运算困难的问题,通过重采样来代替求导计算的近似非线性函数概率密度分布的精度评定方法近些年流行起来,包括蒙特卡罗法[14-16]、刀切法[17]、斯特林插值方法[18]、无迹变换方法[19]等。以上精度评定方法在非线性模型精度评定中通常能够得到有效的统计推断结果,但需要满足观测数据为独立观测这一特殊假设条件。在顾及设计矩阵误差的AR模型中,任意时刻的观测值均为自身最近$P$阶滞后项的线性组合,使得观测向量元素之间不存在相关性的特殊假设无法得到保证。因此,在保留时间序列观测数据之间相关性的情形下,对AR模型中的未知参数开展精度评定也是本文主要研究的问题。

自助采样方法[20-22]是与刀切法紧密相关的一种统计推断方法,均用于修正统计估计值的偏差或估计方差信息。文献[20]首次提出了通过重复采样得到自助世界的经验分布来逼近总体真实分布,并给出了其基本采样策略和相关理论证明。由于自助法无须任何参数假设,只需通过有放回随机抽样策略获取自助样本并构建抽样分布的方式,便可获得未知量的均值和方差,因此历年来有较多学者将该方法用于偏差分析和方差计算[23-26]。针对不同的研究问题和应用领域,自助法重采样包含众多演变方法,包括数据独立同分布的自助法、块自助法[27-30]、Sieve自助法[31-32]等。基于独立同分布的自助法需要满足观测数据为独立的特殊限定。块自助法根据不同的分块准则和采样策略,可以分为移动块自助(moving block Bootstrap,MBB)法[27]、非重叠块自助(nonoverlapping block Bootstrap,NBB)法[28]、圆形块自助(circular block Bootstrap,CBB)法[29]以及静止块自助(stationary block Bootstrap,SBB)法[30]。Sieve自助法将残差样本作为重采样过程中的随机项,将研究数据的分布转化为研究未知统计量的分布。目前,块自助重采样的研究主要集中于该方法在统计学上的性质,将其用于

解决大地测量领域中的时间序列模型精度评定问题还有待研究。

本文在顾及设计矩阵误差的基础上,为有效避免精度评定过程中的求导计算并且较好地保留原始序列的相关性,将 Sieve 自助法的思想引入到块自助法中,并定义了 4 种精度评定方法。将本文 4 种方法用于模拟实验和北斗精密钟差真实实验,验证本文精度评定流程的正确性以及方法的可靠性和优势。

## 1　AR 模型与顾及设计矩阵误差的解法

时间相关性描述了一个时间序列内部的相关关系。观测数据 $y_t$ 与 $y_{t-1}$ 是不同时刻的随机变量,同属于时间序列 $\{y_t\}$,彼此相互关联。假设时间序列数据 $\{y_t\}$ 符合 AR($P$)模型,那么任意时刻的观测值均为自身最近 $P$ 阶滞后项的线性组合,该平稳的时间序列能够使用函数 $y_t=f(y_1,y_2,\cdots,\varepsilon_t)$ 表示为:

$$\begin{cases} y_t=\beta_1 y_{t-1}+\beta_2 y_{t-2}+\cdots+\beta_p y_{t-p}+\varepsilon_t \\ \varepsilon_t\sim \text{i.i.d } N(0,\sigma^2) \end{cases} \tag{1}$$

式中,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 为 AR 模型的系数,$p$ 为阶数;$t$ 表示时刻;$\varepsilon_t$ 为观测误差;i.i.d 表示独立同分布;$N(0,\sigma^2)$ 表示均值为 0、方差为 $\sigma^2$ 的正态分布。

对于 $p$ 阶 AR 模型,经典的解法为 LS 法,但 LS 法在求解 AR 系数时忽略了设计矩阵中的元素含有随机误差,导致其理论缺乏严密性,且观测向量误差与设计矩阵误差同源,若采用奇异值分解算法获取 AR 系数,则会导致同一观测数据的改正值不唯一。因此,本文采用一种能够顾及设计矩阵误差且保证同一观测值的改正数为唯一的参数估计算法。

首先,将式(1)改写为矩阵形式,计算公式为:

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{E}_Y=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_A)\boldsymbol{\beta} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ 为观测向量,由时间序列 $\{y_t\}$ 中的元素组成,$n=m-p$ 表示 AR 过程中的方程式个数,$m$ 表示时间序列的原始样本容量;$\boldsymbol{E}_Y\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ 为观测向量误差;$\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^{p\times 1}$ 为 AR 系数组成的向量;$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times p}$ 表示设计矩阵;$\boldsymbol{E}_A\in\mathbf{R}^{n\times p}$ 为设计矩阵误差。

由于含有随机误差的元素规律地分布在设计矩阵不同位置并且重复出现,为提升计算效率,本文采用文献[33]提出的变量误差模型,该模型将设计矩阵中不同的随机元素进行了提取并作为待估量进行求解。根据随机误差平方和最小准则并依据文献[34]的推导思想,可得 AR 系数的迭代计算式为:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=[\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_e\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}]^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_e\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Y} \tag{3}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 为 AR 系数估值向量;$\hat{\boldsymbol{A}}$ 为设计矩阵估值;$\boldsymbol{K}$ 表示中间变量的替换矩阵;$\boldsymbol{Q}_e$ 为协因数矩阵。

进一步可求解出 AR 系数的方差-协方差矩阵 $\boldsymbol{D}_{\hat{\beta}}$,计算公式为[34]:

$$\boldsymbol{D}_{\hat{\beta}}=\hat{\sigma}_0^2\boldsymbol{Q}_{\hat{\beta}} \tag{4}$$

式中,$\hat{\sigma}_0^2$ 为单位权方差,自由度为 $n-p$;$\boldsymbol{Q}_{\hat{\beta}}=[\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_e\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}]^{-1}$ 为 AR 系数的协因数矩阵。

## 2　AR 模型精度评定的 Sieve 块自助采样方法

顾及设计矩阵误差时间序列 AR 模型实际上是一种非线性模型,而对于非线性平差模型,其参数估计与精度评定过程可以看作是通过从总体中抽取的固定原始样本,对模型中的未知统计量及其精度进行统计推断。

自助法是将原始样本视为总体,依据有放回随机抽样准则从总体分布函数中得到一系列独立的自助样本,并通过计算每个自助样本来获取未知统计量抽样分布的经验估计[20,35],利用该抽样分布估计进行总体推断。自助法的优势主要集中在它不需要对未知模型及数据分布做任何假设,也无需推导未知估计量的精确表达式,只需要通过重采样来检验样本内统计量的变化便能够得到未知参数的抽样分布估计。

### 2.1　基于独立同分布的自助法

原始自助法需要满足数据为独立且同分布的特殊假设条件,其基本思想可以概述为:假设从总体中抽取的固定样本集为 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,总体的分布函数表示为 $F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta})$,其中 $\boldsymbol{X}$ 为随机项,$\boldsymbol{\beta}$ 是未知参数;以 $\boldsymbol{X}$ 中的单个元素作为重采样单元,并对其进行有放回随机抽样,获取 $M$ 个样本容量仍为 $m$ 的自助样本。该过程使得自助样本的经验分布函数能够不断逼近原始样本统计量的分布[20],以便于输出未知统计量的期望 $E(\boldsymbol{\beta})$ 与方差 $D(\boldsymbol{\beta})$。

根据自助法重采样过程中随机项的不同,原始自助法又可分为重采样观测值的自助法和重采样残差值的自助法[35]。但以上两种采样策略只适用于限定观测数据为不相关的特殊情况,当

观测数据具有相关性时,例如时间序列,若继续应用原始自助法,可能会导致统计推断失效。

### 2.2 Sieve块自助法

考虑到时间序列AR($p$)模型中的数据之间存在时间维度上的相依性结构,原始自助法不适用,本文引入块自助法。

块自助法的基本思想可以概述为:首先将从总体中抽取得到的时间序列样本集($y_1,y_2,\cdots,y_m$)视为总体,总体的分布函数表示为$F(\boldsymbol{X},\beta)$,其中$\boldsymbol{X}$为重采样过程中的随机项,$\beta$为未知统计量;其次,对随机项向量进行分块处理,通过分块处理使得每个数据块之间近乎独立,而单个数据块能够捕捉到原始时间序列中的相依性结构;然后,将这些数据块视为重采样单元,并实施有放回随机抽样,构建用于解算AR系数的伪原始序列,称之为块自助样本;将生成块自助样本到解算未知系数的整个过程重复$M$次,得到$M$组系数估值($\hat{\beta}_1^*,\hat{\beta}_2^*,\cdots,\hat{\beta}_M^*$);最后根据$M$组估计值的频率分布构建未知统计量抽样分布的自助估计,并通过抽样分布经验估计输出未知量的统计信息。

在构建块自助样本的过程中,数据块之间的首尾相连将导致每个数据块的边界处无法保留原始时间序列的相关性结构,进而产生边界效应[32],有损统计推断结果的精度。对于MBB法,由于该方法将原始时间序列数据$\{y_t\}$划分为$m-l+1$个数据块$N_1\sim N_{m-l+1}$(其中$l$为数据块的长度),因此,对于观测数据$y_j(l\leqslant j\leqslant m-l)$,其出现在$N_1\sim N_{m-l+1}$中刚好是$l$次;但对于观测数据$y_j$和$y_{m-j-1}(1\leqslant j\leqslant l-1)$,其在$N_1\sim N_{m-l+1}$中仅出现$j$次。当$l\neq j$时,使得$\{y_t\}$中的等精度观测数据在$m-l+1$个数据块中出现的次数却不一致,进而导致$\{y_t\}$中的观测数据被采样到块自助样本的概率不等,因此存在理论上的不完备性。此外,对于NBB法,该方法将$\{y_t\}$分为$\lfloor m/l\rfloor$个数据子集($\lfloor()\rfloor$表示小于()的最大整数),当$m$不是块长度$l$的倍数时,靠近时间序列数据尾部的观测数据$y_j(m-r+1\leqslant j\leqslant m)$将不会被划分到数据子集中,即导致该$r$个观测数据的出现概率为0。因此,为解决以上两个问题,本文引入Sieve自助法思想。

Sieve自助法的基本思想是将研究时间序列$\{y_t\}$的分布问题转化为研究AR系数的分布。首先,采用顾及设计矩阵误差的解法对AR模型参数进行初步估计,得到AR系数估值($\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_p$),通过AR过程得到残差序列:

$$\hat{v}_i=y_i-\sum_{j=1}^{p}\hat{\beta}_j y_{i-j},p+1\leqslant i\leqslant m \tag{5}$$

式中,$\hat{v}_i$为$y_i$的残差值;$j$表示序号,其中$1\leqslant j\leqslant p$。

在获取残差序列$\{\hat{v}_i\}$后,对残差进行中心化处理,得到中心化残差:

$$\bar{v}=(m-p)^{-1}\sum_{j=p+1}^{m}\hat{v}_i \tag{6}$$

$$\{\gamma_i=\hat{v}_i-\bar{v}\,|\,p+1\leqslant i\leqslant m\} \tag{7}$$

式中,$\bar{v}$为残差序列平均值;$\{\gamma_i\}$为中心化残差序列。

然后,采用块自助法对该序列进行分块处理,并且对得到的中心化残差序列子集进行有放回随机抽样,获取中心化残差自助样本$\{\gamma_i^*\}(p+1\leqslant i)$。最后,通过AR过程得到块自助样本:

$$y_i^*=\sum_{j=1}^{p}\hat{\beta}_j y_{i-j}^*+\gamma_i^*,p+1\leqslant i \tag{8}$$

式中,$\{y_i^*\}(p+1\leqslant i)$为用于解算AR系数的块自助样本。对于$i\leqslant p$,采用序列的均值进行替代,即$\{y_i^*=\bar{y}_m\},i\leqslant p$,其中$\bar{y}_m$为$\{y_t\}$的均值。

Sieve块自助采样方法将重采样过程中的$\boldsymbol{X}$由原始时间序列观测数据转换为中心化残差序列,能够保证每个观测值出现在数据块中的权重相等,并且不会造成数据未使用到的问题。此外,该方法在构建块自助样本过程中并不会产生边界效应问题,能够较好地保留原始时间序列中的自相关依赖结构,因此理论上更具有严密性。

通过循环反复构建$M$个块自助样本后,得到$M$个块自助样本并分别解算,获取$M$组AR系数估值($\hat{\beta}_1^*,\hat{\beta}_2^*,\cdots,\hat{\beta}_M^*$),根据估计值的概率分布构建未知统计量抽样分布的自助估计,并输出未知量的统计信息。均值作为抽样分布中最重要的参数之一,通常情况下需要将其用于计算未知统计量的精度信息,均值计算公式为[20,26,35]:

$$E(\beta)=\sum_{i=1}^{M}\beta_i^*/M \tag{9}$$

式中,$E(\beta)$为AR系数的自助估计值。

由于顾及设计矩阵误差的解法得到的AR系数估值不再具有无偏性,而通过大量的有放回随机采样过程能够在一定程度上减弱迭代计算产生的偏差,因此本文将式(9)的结果作为块自助

法得到的AR系数最终估计。

在获取AR系数均值后,将重采样过程中获取的$(\hat{\beta}_1^*,\hat{\beta}_2^*,\cdots,\hat{\beta}_M^*)$作为估值样本,采用矩法估计的思想原理获取AR系数的方差-协方差阵[22,26,35]:

$$D(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{M}[(\hat{\beta}_i^*-E(\boldsymbol{\beta}))^2]/(M-1) \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}=\sqrt{D(\boldsymbol{\beta})_{i,i}} \quad (i=1,2,\cdots,p) \quad (11)$$

式中,$D(\boldsymbol{\beta})$为AR系数的自助方差-协方差矩阵;$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}$为AR系数的标准差。

从式(10)及式(11)可以看出,Sieve块自助采样方法可以用于求取顾及设计矩阵误差时间序列AR模型系数的方差或协方差。因此,本文将该采样方法引入到AR模型的精度评定中,并根据分块准则和采样策略的不同,定义了4种精度评定方法。

### 2.3　精度评定流程

精度评定的Sieve-MBB采样方法依据最优块长度将中心化残差序列划分为多个子块,并通过对子块的有放回随机抽样得到中心化残差自助样本,并以此构建块自助样本。每个残差子块被采样到的概率相等,每个块自助样本的样本容量与原始时间序列样本相同。但有放回随机抽样过程使得中心化残差自助样本可能包含某些重复的子块,而另外一些数据子块并未出现。因此,每个块自助样本将随机地异于原始序列,导致每个块自助样本得到的AR系数估值存在细微差异。

与MBB采样方法类似,精度评定的Sieve-NBB采样方法根据迭代法选择的最优块长度将中心化残差序列划分为多个子集,通过对子集的有放回随机抽样得到中心化残差自助样本并构建块自助样本,根据抽样分布得到未知量的精度信息。但在对中心化残差序列进行分块处理时,由于依赖于受采样准则,NBB法得到的中心化残差子集之间不存在重叠。

与MBB法、NBB法一致,精度评定的Sieve-CBB采样方法划分得到的每个中心化残差子集的长度相同。但CBB法通过将原始时间序列或中心化残差序列进行周期性延伸$\{y_m\}=\{y_m,y_m\}$、$\{\boldsymbol{\gamma}\}=\{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\}$,因此能够得到与样本容量$m$相同个数的中心化残差子集。相比于其他3种采样方法,CBB法得到的可供重采样的子块最多。

与MBB法、NBB法、CBB法相比,精度评定的Sieve-SBB采样方法最大的差异在于,SBB法得到的每个中心化残差子集的块长度可能并不相同,其所满足的概率密度函数为几何分布,并且将迭代寻优算法获取到的最优块长度作为参数确定该几何分布。因此,在每循环一次SBB采样的过程中,被抽样到的中心化残差子集个数由于受采样随机性的影响,可能并不相等。

各方法之间的差异主要集中在分块规则与采样规则,即数据块长度是否固定、所划分的数据块个数、数据块之间是否存在重叠、需要重采样的子集个数,以及重采样过程中所满足的分布等。具体而言,MBB法和NBB法的计算步骤基本相同,仅在分块规则这一部分有差异。MBB法的计算步骤中的分块规则为:对中心化残差$\{\boldsymbol{\gamma}\}$进行分块预处理,获取$N=m-p-l+1$个残差序列子集$\{\gamma(i,k)\}$。而NBB法的计算步骤中的分块规则为:对$\{\boldsymbol{\gamma}\}$进行分块预处理,分为$N=\lfloor(m-p)/l\rfloor$个子集$\{\gamma(i,k)\}$,其中$i=1,2,\cdots,N$,$k=l$。而CBB法不仅在分块规则这一计算步骤与MBB法和NBB法有差别之外,还比这两种方法的计算步骤多一步,即先将序列周期性延伸$\{y_m\}=\{y_m,y_m\}$,为方便编程采样与计算,对$\{\boldsymbol{\gamma}\}=\{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\}$进行编号处理,然后再对$\{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\}$进行分块预处理,分为$N=m-p$个中心化残差序列子集$\{\gamma(i,k)\}(i=1,2,\cdots,N,k=l)$。SBB法的计算步骤与其他3种方法在分块规则与采样规则当中均不相同,具体描述为:采用周期性延伸序列$\{\boldsymbol{\gamma}\}=\{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\}$,并对其进行编码预处理;产生随机数$I_{4i}(1\leqslant i)$,概率密度函数所附有条件为均匀分布$P(I_{4i}=J)=1/(m-p)(1\leqslant J\leqslant m-p)$;产生概率密度函数为独立同几何分布的随机数$L_i(1\leqslant i)$,$L_i$满足参数为$p=1/l(p\in(0,1))$的几何分布$p(L_i=k)=p(1-p)^{k-1}$,$k=1,2,3,\cdots$;对$\{\boldsymbol{\gamma}\}=\{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\}$进行有放回随机抽样,获取子集$\gamma(I_{4i},L_i)$;分别循环这一部分的步骤$\gamma(I_{41},L_1)$,$\gamma(I_{42},L_2),\cdots,\gamma(I_{4k},L_k)$次,获取子集$\gamma(I_{41},L_1)$,$\gamma(I_{42},L_2),\cdots,\gamma(I_{4k},L_k)$,直到满足条件$L_1+L_2+\cdots+L_k\geqslant m-p$则终止本次重采样。而对于块长度$l$的选取,本文采用文献[36]提出的方法。

## 3 时间序列AR模型精度评定实验与分析

为评估Sieve块自助法在获取时间序列AR模型系数精度信息方面的性能以及探讨在大地测量领域中的应用,本文通过算例1来验证所提出的方法在AR模型精度评定中的可行性以及所给出的精度评定流程的正确性;通过算例2来展示本文方法在大地测量时间序列模型精度评定中的应用价值,并验证其在卫星钟差预报方面的优势。本文依据已有研究的经验取值并顾及时间序列精度评定实际问题[37-40],在保证较高的计算精度条件下,同时考虑较高的精度评定效率,将重采样次数$M$设置为1 000。

### 3.1 仿真实验

仿真实验采用AR(3)模型,其函数形式为:

$$\begin{cases} y_t=\beta_1 y_{t-1}+\beta_2 y_{t-2}+\beta_3 y_{t-3}+\varepsilon_t \\ \varepsilon_t\sim N(0,1) \end{cases} \tag{12}$$

式中,AR系数的真值分别设置为$\beta_1=0.735\,05$、$\beta_2=0.127\,81$、$\beta_3=-0.401\,08$。

分别使用LS法、TLS法、原始自助法以及本文定义的4种Sieve块自助采样方法对模拟产生的100个观测数据进行参数估计,获取AR系数统计均值,各方法所得AR系数估值、差值二范数以及均方误差(mean squared error,MSE)均列于表1。

**表1 仿真实验AR系数的估值、二范数以及MSE**

Table 1 Estimation, Two-Norms, and MSE of AR Coefficients in Simulation Experiment

| 统计值 | 真值 | LS法 | TLS法 | 自助法 | MBB法 | NBB法 | CBB法 | SBB法 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\beta}_1$ | 0.735 05 | 0.709 25 | 0.753 21 | 0.202 96 | 0.748 71 | 0.747 24 | 0.748 32 | 0.748 72 |
| $\hat{\beta}_2$ | 0.127 81 | 0.167 54 | 0.103 19 | −0.859 56 | 0.110 46 | 0.112 47 | 0.111 03 | 0.110 30 |
| $\hat{\beta}_3$ | −0.401 08 | −0.424 08 | −0.391 09 | −2.559 19 | −0.394 92 | −0.395 93 | −0.395 17 | −0.394 81 |
| $\lVert\hat{\beta}-\tilde{\beta}\rVert$ | | 0.052 66 | 0.032 18 | 2.432 17 | 0.022 92 | 0.020 26 | 0.022 19 | 0.023 07 |
| MSE | | 0.000 92 | 0.000 34 | 1.971 82 | 0.000 17 | 0.000 13 | 0.000 16 | 0.000 17 |

由表1中的结果可以看出,原始自助法所得AR系数估值与真值完全偏离。这是因为原始自助法所依据的采样准则是针对独立观测的单个随机项样本元素进行有放回随机抽样,因此在时间序列AR模型中,直接实施自助法重采样过程将无法保留时间序列观测数据中的时间相关性结构,从而引入较大的采样误差,导致严重影响系数估计值的质量。

相比于LS法,TLS法得到的估值更优,其与模拟真值的差值二范数减小了38.89%,MSE减小了63.04%,表明顾及设计矩阵误差的确能够削弱时间序列观测数据中的随机噪声对AR系数的影响。TLS法通过循环迭代过程能够不断修正系数估值,有效改善设计矩阵误差对待估参数引起的精度损失。

从表1可知,本文定义的4种Sieve块自助采样方法所得AR系数估值较为接近,并且均小于LS法和TLS法的结果。这表明Sieve块自助方法能够在削弱设计矩阵误差对系数估值影响的基础上,有效减小迭代过程中产生的偏差,提升统计均值的精确度,进而使得AR系数估值更靠近模拟真值。进一步表明,本文提出的Sieve块自助方法在时间序列AR模型的参数估计方面是可行且有效的,也验证了本文定义的4种采样方法的正确性。

在获取统计均值后,分别依据本文给出的4种精度评定流程获取AR系数的标准差,并与LS法、TLS法以及原始自助法的结果进行对比评价,各方法所获得的标准差与协方差列于表2。

通过表2中的结果可以看出,原始自助法所得AR系数的标准差与协方差在数值和量级上均偏大,结合表1中的估值结果,表明该方法所得AR系数精度信息并不可靠,在AR模型的参数估计与精度评定问题中的适用性较差。TLS方法得出的标准差和协方差均略大于LS法所得的结果,而在表1中,TLS法的AR系数估值优于LS法的结果。从这一现象可以看出,LS法得到的标准差可能高估了AR系数估值的精度,因此无法精确地反映估值的实际精度。TLS法是一种从求导途径获取AR系数方差-协方差阵的方法,而逐步的迭代过程使得许多中间变量以及参数的改正数均含有随机性,导致AR系数估值与原始时间序列观测值之间为复杂的非线性关系,并且为嵌套的隐函数形式。因此,忽略了高阶项的近似函数精度评定方法所得标准差结果不够精确。

从计算结果上看,依据本文给出的精度评定

**表 2　仿真实验 AR 系数的标准差与协方差**

Table 2　Standard Deviations and Covariances of AR Coefficients in Simulation Experiment

| 标准差或协方差 | LS 法 | TLS 法 | 自助法 | MBB 法 | NBB 法 | CBB 法 | SBB 法 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$ | 0.024 96 | 0.048 13 | 11.258 52 | 0.039 03 | 0.037 97 | 0.040 79 | 0.039 36 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}$ | 0.035 25 | 0.065 98 | 8.661 05 | 0.053 69 | 0.052 41 | 0.056 11 | 0.054 33 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}$ | 0.019 03 | 0.033 69 | 6.743 17 | 0.027 40 | 0.026 83 | 0.028 72 | 0.027 84 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2}$ | −0.000 87 | −0.003 16 | −10.080 64 | −0.002 09 | −0.001 98 | −0.002 28 | −0.002 13 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3}$ | 0.000 45 | 0.001 61 | 7.012 14 | 0.001 07 | 0.001 02 | 0.001 17 | 0.001 09 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3}$ | −0.000 66 | −0.002 22 | −11.190 26 | −0.001 47 | −0.001 40 | −0.001 61 | −0.001 51 |

流程所获取的标准差都略小于 TLS 法的计算精度,并且结合表 1 中的系数估值,本文方法所得 AR 系数均优于 TLS 法的结果,这表明本文定义的精度评定方法获取的 AR 系数精度信息更加精确可靠。此外,Sieve 块自助采样方法是通过重采样的形式避免了精度评定过程中的求导运算,在获取更加精确的 AR 系数估值的基础上,得到了更加合理的精度信息,因此也说明了本文方法在 AR 模型精度评定问题中具有更强的适用性。

### 3.2　真实实验

真实算例实验数据来源于武汉大学国际全球导航卫星系统服务分析中心发布的精密卫星钟差产品,从中提取卫星号为 C08 的为期 1 d 的钟差数据进行实验,其序列时段为 2019-10-01T00:00:00—2019-10-01T23:55:00,采样间隔为 5 min,共含 288 个历元。在获取残差序列后,首先对该时段内的钟差数据进行缺失统计;其次,对该钟差序列进行平稳性检验,在经过两次差分后,单位根检验和平稳性检验均显示序列平稳;最后通过赤池信息准则得到 AR 模型的阶数为 5。

在经过数据预处理以及模型定阶后,利用 AR(5)模型并依据两次差分后的钟差序列前 150 个历元钟差数据进行模型参数估计与精度评定,然后对后 136 个历元进行预报,最后通过反差分运算获取钟差预报值,并与原始钟差序列数据进行对比检验与精度评估。由算例 1 的结果可知,由于原始自助法的结果不足以反映 AR 系数估值的真实精度,而 LS 法所得系数标准差可能会高估参数估值的精度,因此真实实验中仅通过本文提供的 4 种 Sieve 块自助采样方法获取 AR 系数的统计均值与精度信息,并与 TLS 法的结果进行对比。

分别采用本文 4 种方法以及 TLS 法得到的 AR 系数来构建预报模型,得到卫星钟差的预报值,各方法所得钟差预报值以及原始卫星钟差序列见图 1。将原始卫星钟差序列后 136 个历元的观测值视为真值,其与以上 5 种方法所得钟差预报值之差见图 2。在拟合原始钟差序列并且确定模型的过程中,各方法所得 AR 系数的估值及其对应标准差结果见表 3。为评价预报精度,表 3 还记录了各方法所得预报值与实际观测值之间的均方根(root mean square,RMS)。

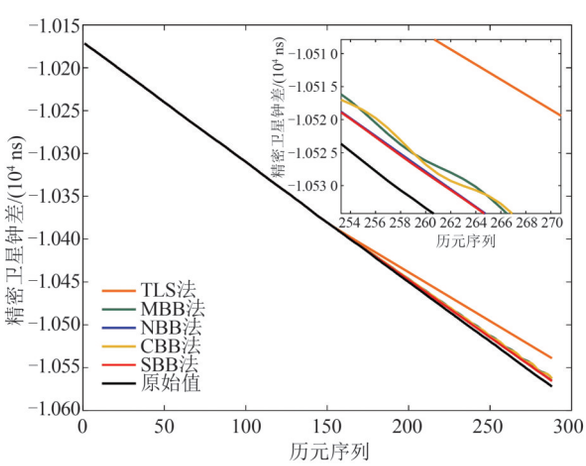



图 1　实际钟差序列与预报钟差

Fig. 1　Actual Satellite Clock Biases and Prediction Values

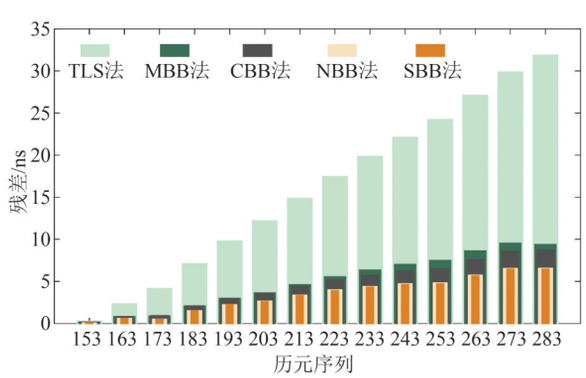



图 2　实际钟差序列与预报钟差之间的残差

Fig. 2　Residuals Between Actual Satellite Clock Biases and Prediction Values

**表3 卫星钟差实验AR系数的估值、标准差及均方根解算结果**

Table 3 Results of Estimation, Standard Deviations and RMS of AR Coefficients in Satellite Clock Bias Experiment

| 统计值 | TLS法 | MBB法 | NBB法 | CBB法 | SBB法 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\hat{\beta}_1$ | 0.180 05 | 0.281 79 | 0.218 23 | 0.092 87 | 0.332 88 |
| $\hat{\beta}_2$ | −0.695 16 | 0.197 35 | 0.139 49 | 0.203 21 | 0.058 74 |
| $\hat{\beta}_3$ | 0.739 16 | 0.196 01 | 0.223 73 | 0.160 90 | 0.053 08 |
| $\hat{\beta}_4$ | −0.207 81 | −0.680 69 | −0.477 63 | −0.735 54 | −0.597 04 |
| $\hat{\beta}_5$ | 0.337 88 | −0.336 60 | −0.448 37 | −0.421 77 | −0.282 23 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$ | 0.638 58 | 1.101 66 | 1.350 20 | 1.224 09 | 1.517 27 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}$ | 0.478 56 | 1.416 81 | 1.903 07 | 1.210 27 | 1.856 45 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_3}$ | 0.710 48 | 1.790 37 | 1.360 81 | 1.055 37 | 2.173 31 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_4}$ | 0.441 18 | 0.765 46 | 0.721 09 | 0.819 71 | 1.454 04 |
| $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_5}$ | 0.306 11 | 0.775 37 | 0.868 68 | 0.645 56 | 0.884 02 |
| RMS/ns | 19.221 22 | 5.717 25 | 4.103 49 | 5.594 99 | 3.989 24 |

由图1可以看出,依据本文方法获取到的AR系数统计均值所构建的预报模型,其最终得到的136个历元钟差预报值与分析中心提供的实际钟差序列几乎完全重合,仅能够看出两者之间细微的差异。此外,从图1中也能够直观地看出,TLS法得到的钟差预报值与原始序列观测值偏离较远,并且随着历元的增加,其与实际值的偏离愈大。对比4种采样方法与TLS法的结果可以发现,本文方法的预报精度高于顾及设计矩阵误差的TLS法的预报精度。

图2表示从第153个历元开始,以10个历元为采样间隔绘制了不同历元各方法的残差值。各方法所得钟差预报值与实际钟差序列之差的单位为ns,相对于单位s而言,本文4种Sieve块自助采样方法得到的残差的数量级为$1\times10^{-9}$,而TLS法得到的残差数量级为$1\times10^{-8}$。因此,本文方法得到的残差较TLS法的残差大约小了一个数量级。图1与图2结果均说明了采用本文方法所构建的卫星钟差预报模型更加精确。

根据表3中各方法所得到的RMS结果可知,4种Sieve块自助采样方法获取的RMS在数量级上保持一致,在数值上较为接近,并且均小于TLS法的结果。从数值上看,相比于TLS法的RMS,MBB法、NBB法、CBB法以及SBB法的RMS分别减小了70.25%、78.65%、70.89%和79.24%。结果表明,Sieve块自助采样方法具有更高的预报可靠性和精度。RMS结果以及图1、图2共同从侧面反映了本文采样方法得到的AR模型系数更加精确可靠。

对比表3中5种方法所获取的AR系数估值可以看出,本文给出的Sieve块自助采样方法所得统计均值与TLS法得到的估值在数量级上基本一致,其中本文4种采样方法得到的AR系数估值之间较为接近,并且符号均保持一致。结合图1、2以及表3中各方法所得到的RMS可以看出,本文采样方法所获取的AR系数更加可信,在提升AR模型参数质量方面更具优势。

由表3中各方法所得到的AR系数标准差可以发现,4种Sieve块自助采样方法计算得到的标准差在数量级上保持一致,在数值上较为接近。此外,TLS法得出的参数标准差小于本文提出的4种采样方法得出的AR系数精度。结合表3中的RMS结果以及图1与图2,本文方法所得系数估值优于TLS法的结果。这一现象说明TLS法获取的参数标准差高估了AR模型系数真实精度,这是由于TLS法是求取非线性模型偏导数来获取AR系数的精度信息。因此,TLS法所得到的参数标准差无法合理反映参数的实际精度信息。相比之下,Sieve块自助法通过重采样来获取未知统计量抽样分布,能够有效替代精度评定过程中的导数计算,因此得到更加合理可靠的精度信息。由于SBB法受采样随机性影响,其所估计的参数标准差较其余3种方法更大。从5个AR系数的标准差结果可以看出,前3个系数的标准差比其他2个系数的标准差更大,这可能是由于本文实验所采用的C08号卫星的钟差序列中的随机噪声对前3阶系数产生了较大影响,该现象也从侧面反映出本文提供的时间序列精度评定方法能够合理有效地反映AR模型各个系数的精度信息。

## 4 结　语

为获取AR模型系数在统计意义上更具可靠性的精度信息,若采用经典LS法,由于无法顾及设计矩阵误差,导致其参数估计与精度评定理论缺乏严密性;若顾及设计矩阵误差并依据泰勒级数展开的方法进行精度评定,则需要计算非线性函数的偏导数;若借助通过重采样来代替导数计算的近似非线性函数的概率密度分布方法,通常无法保留时间序列观测数据内部的相关性结构。因此,为有效解决以上问题,本文在阐述块自助重采样原理的基础上,将Sieve自助法的思想融入顾及设计矩阵误差的AR模型精度评定过程。根据分块准则和采样策略的不同,本文定义了4种Sieve块自助精度评定方法,并给出了相应的重采样步骤与精度评定流程,试图在顾及设计矩阵误差情形下,还能够避免精度评定过程中的导数计算并且保留原始数据的相关性,得到更加合理的参数精度。

模拟实验和北斗卫星精密钟差真实案例研究表明,本文定义的4种Sieve块自助精度评定方法能够得到比经典LS法、传统的顾及设计矩阵误差解法更加精确的AR系数估值及其标准差。在卫星精密钟差真实案例中,本文所给出的MBB法、NBB法、CBB法以及SBB法的RMS相比于TLS法的RMS分别减小了70.25%、78.65%、70.89%和79.24%;进一步验证了本文精度评定流程的正确性和有效性,同时也说明将本文方法用于解决顾及设计矩阵误差AR模型精度评定问题具有优势性。但本文方法以牺牲计算量为代价换取精度的提升,因此,建议在精度要求较高的情况下使用。本文研究成果完善了时间序列AR模型的精度评定理论研究,随着Sieve块自助采样方法的引入,将拓展其在大地测量领域中的应用,对非线性平差理论的进一步丰富也将起到积极的促进作用。

## 参　考　文　献


[1] 叶志伟, 尹晖, 张守建. AR模型谱在超导重力数据信号检测中的分析研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(6): 536-539.
YE Zhiwei, YIN Hui, ZHANG Shoujian. Using AR Model Spectrum Algorithms to Detect Superconducting Gravimetric Signals[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(6): 536-539.

[2] 李广春, 戴吾蛟, 杨国祥, 等. 时空自回归模型在大坝变形分析中的应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(7): 877-893.
LI Guangchun, DAI Wujiao, YANG Guoxiang, et al. Application of Space-Time Auto-Regressive Model in Dam Deformation Analysis[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(7): 877-893.

[3] 张昊, 王琪洁, 朱建军, 等. 对钱德勒参数进行时变修正的CLS+AR模型在极移预测中的应用[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(3): 286-289.
ZHANG Hao, WANG Qijie, ZHU Jianjun, et al. Application of CLS+AR Model Polar Motion to Prediction Based on Time-Varying Parameters Correction of Chandler Wobble[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(3): 286-289.

[4] 王乐洋, 苗威. 顾及有效角动量信息的地球自转参数中长期预报方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(10): 1846-1855.
WANG Leyang, MIAO Wei. Medium-Long Term Forecasting Method for Earth Rotation Parameters Considering Effective Angular Momentum Information[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(10): 1846-1855.

[5] 吴飞. 几种改进的地球自转参数预报方法[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2019.
WU Fei. Several Improved Methods for Prediction of Earth Rotation Parameters[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2019.

[6] TAO Y Q, HE Q N, YAO Y F. Solution for a Time-Series AR Model Based on Robust TLS Estimation[J]. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 2019, 10(1): 768-779.

[7] 齐志军, 方兴, 吕志鹏. 两种适用于线性回归EIV模型的高崩溃污染率算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2025, 50(1): 74-82.
QI Zhijun, FANG Xing, LÜ Zhipeng. Two Algorithms with High Breakdown Points Applied in Linear Regression EIV Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2025, 50(1): 74-82.

[8] 刘建, 王琪洁, 张昊. 利用端部效应改正的LS+AR模型进行日长变化预报[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(8): 916-919.
LIU Jian, WANG Qijie, ZHANG Hao. Prediction of LOD Change Based on the LS and AR Model with Edge Effect Corrected[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38

(8):916-919.

[9] 姚宜斌,黄书华,陈家君.求解自回归模型参数的整体最小二乘新方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2014,39(12):1463-1466.
YAO Yibin, HUANG Shuhua, CHEN Jiajun. A New Method of TLS to Solving the Autoregressive Model Parameter[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(12):1463-1466.

[10] 姚宜斌,熊朝晖,张豹,等.顾及设计矩阵误差的AR模型新解法[J].测绘学报,2017,46(11):1795-1801.
YAO Yibin, XIONG Zhaohui, ZHANG Bao, et al. A New Method to Solving AR Model Parameters Considering Random Errors of Design Matrix[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2017, 46(11):1795-1801.

[11] 徐培亮.非线性函数的协方差传播公式[J].武汉大学学报(信息科学版),1986,11(2):92-99.
XU Peiliang. Variance-Covariance Propagation for a Nonlinear Function[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 1986, 11(2):92-99.

[12] XUE J, LEUNG Y, MA J H. High-Order Taylor Series Expansion Methods for Error Propagation in Geographic Information Systems[J]. *Journal of Geographical Systems*, 2015, 17(2):187-206.

[13] WANG L Y, ZHAO Y W. Second-Order Approximation Function Method for Precision Estimation of Total Least Squares[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2019, 145(1):04018011.

[14] ALKHATIB H, SCHUH W D. Integration of the Monte Carlo Covariance Estimation Strategy into Tailored Solution Procedures for Large-Scale Least Squares Problems[J]. *Journal of Geodesy*, 2007, 81(1):53-66.

[15] SHEN Y Z, LI B F, CHEN Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least-Squares Adjustment[J]. *Journal of Geodesy*, 2011, 85(4):229-238.

[16] 王乐洋,赵英文.非线性平差精度评定的自适应蒙特卡罗法[J].武汉大学学报(信息科学版),2019,44(2):206-213.
WANG Leyang, ZHAO Yingwen. Adaptive Monte Carlo Method for Precision Estimation of Nonlinear Adjustment[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2019, 44(2):206-213.

[17] WANG L Y, YU F B. Jackknife Resample Method for Precision Estimation of Weighted Total Least Squares[J]. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2021, 50(5):1272-1289.

[18] 王乐洋,邹传义.乘性误差模型参数估计及精度评定的Sterling插值方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2022,47(2):219-225.
WANG Leyang, ZOU Chuanyi. Sterling Interpolation Method for Parameter Estimation and Precision Estimation in Multiplicative Error Model[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(2):219-225.

[19] WANG L Y, DING R. Inversion and Precision Estimation of Earthquake Fault Parameters Based on Scaled Unscented Transformation and Hybrid PSO/Simplex Algorithm with GPS Measurement Data[J]. *Measurement*, 2020, 153:107422.

[20] EFRON B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife[J]. *The Annals of Statistics*, 1979, 7(1):569-593.

[21] JOHNSON R W. An Introduction to the Bootstrap[J]. *Teaching Statistics*, 2001, 23(2):49-54.

[22] CHEN X H. Gaussian and Bootstrap Approximations for High-Dimensional U-Statistics and Their Applications[J]. *The Annals of Statistics*, 2018, 46(2):642-678.

[23] MARTÍNEZ-CAMBLOR P, CORRAL N. A General Bootstrap Algorithm for Hypothesis Testing[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2012, 142(2):589-600.

[24] KITAGAWA G, KONISHI S. Bias and Variance Reduction Techniques for Bootstrap Information Criteria[J]. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2010, 62(1):209-234.

[25] PAN L, POLITIS D N. Bootstrap Prediction Intervals for Linear, Nonlinear and Nonparametric Autoregressions[J]. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2016, 177:1-27.

[26] O'HAGAN A, MURPHY T B, SCRUCCA L, et al. Investigation of Parameter Uncertainty in Clustering Using a Gaussian Mixture Model via Jackknife, Bootstrap and Weighted Likelihood Bootstrap[J]. *Computational Statistics*, 2019, 34(4):1779-1813.

[27] KUNSCH H R. The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations[J]. *The Annals of Statistics*, 1989, 17(3):1217-1241.

[28] CARLSTEIN E. The Use of Subseries Values for Estimating the Variance of a General Statistic from a Stationary Sequence[J]. *The Annals of Statistics*, 1986, 14(3):1171-1179.

[29] POLITIS D N, ROMANO J P. A Circular Block-Resampling Procedure for Stationary Data[M].

(下转第2012页)